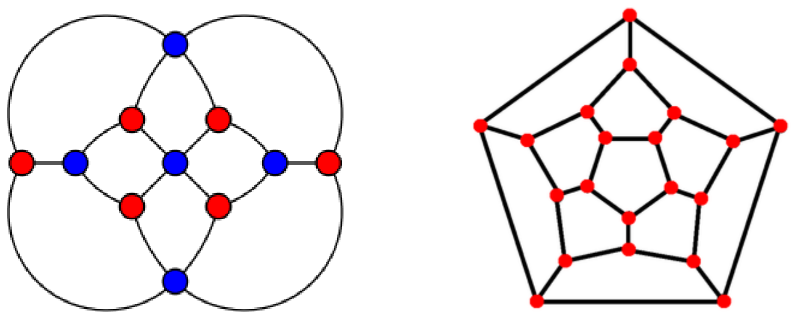
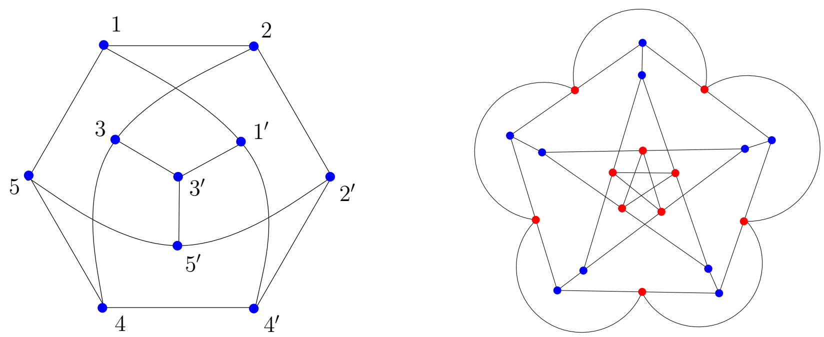
1 Hamiltonovské grafy

Niekoľko grafov namiesto úvodu:



Obr. 1: Herschelov graf a pravidelný Dvanásťsten (prevzaté z WIKI)



Obr. 2: Petersenov graf a Oberly-Sumner graf

Hamiltonovská kružnica v grafe G: kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy G.

Hamiltonovská cesta v grafe G: cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy G.

Hamiltonovský graf: graf, ktorý obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Paralelné hrany nemajú vplyv na existenciu kružnice, a graf na viac ako jednom vrchole a so slučkou takú kružnicu neobsahuje. Preto grafy ktoré budeme uvažovať budú bez slučiek a bez paralelných hrán.

Príklad.
Hamiltonovský graf: kružnica, kompletný na aspoň 3 vrcholoch, kompletný bipartitný s partiami veľkosti $n \geq 2$, kocka dimenzie $n \geq 2$, ...

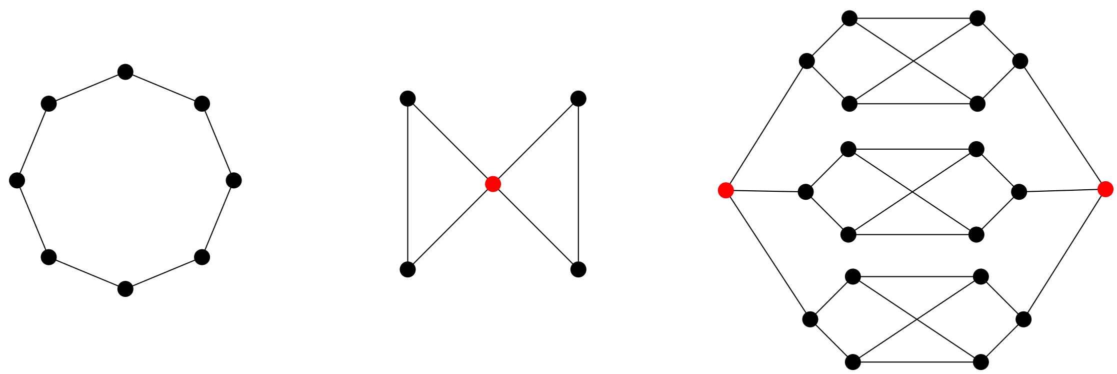
Nehamiltonovský graf: nesúvislý graf, strom, bipartitný na nepárnom počte vrcholov, ...

Problém. Pre daný graf G rozhodnite, či obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Pre konkrétny graf, resp. triedu grafov môže byť riešenie ľahké, vo všeobecnosti však ide o jeden z najťažších problémov v diskrétnej matematike. Výskum sa preto sústreďuje na určenie nutných/postačujúcich podmienok pre existenciu hamiltonovskej kružnice v grafe. Tomu sa teraz budeme venovať.

1.1 Nutné podmienky

Zrejme hamiltonovský graf je súvislý. Môžeme povedať viac, pozrime sa na tieto tri grafy:



Kružnica je hamiltonovský graf. Ako je to so zvyšnými dvomi?

Vynechajme vrchol z hamiltonovského grafu, a teda z hamiltonovskej kružnice. Výsledkom je graf s hamiltonovskou cestou. Inak povedané, hamiltonovský graf je 2-súvislý. Preto motýlik nemá hamiltonovskú kružnicu.

Vynechajme dva vrcholy z hamiltonovského grafu, a teda z hamiltonovskej kružnice. Výsledkom je graf s nanajvýš dvomi komponentami súvislosti. Preto aj graf celkom vpravo nemá hamiltonovskú kružnicu, hoci je 2-súvislý.
Naše pozorovania zovšeobecňuje

Tvrdenie 1.1 *Nech G má hamiltonovskú kružnicu. Potom pre každú $\emptyset \neq S \subset VG$ počet $c(G \setminus S)$ komponentov grafu $G \setminus S$ neprevyšuje $|S|$.*

Dôkaz: Nech C je hamiltonovská kružnica v G. Všetky vrcholy G ležia na C, preto

$$c(G \setminus S) \leq c(C \setminus S)$$

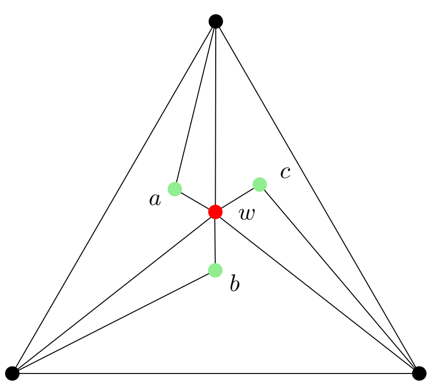
Stačí ukázať

$$c(C \setminus S) \leq |S|$$

To je však jasné, lebo komponenty $c(C \setminus S)$ sú cesty (ak chceme podrobne, indukciou podľa $|S|$).

Dôsledok 1.1 *Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ je hamiltonovský len keď $m = n$*

Existujú grafy, ktoré spĺňajú nutnú podmienku z Tvrdenia 1.1 a nie sú hamiltonovské.



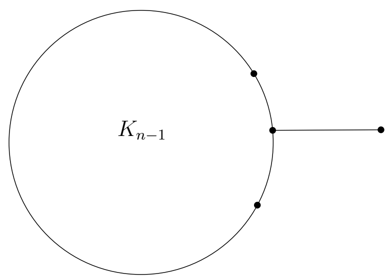
Obr. 3: nehamiltonovský graf, vyhovuje nutnej podmienke z Tvrdenia 1.1

Úloha.
1. Ukážte, že Petersenov graf vyhovuje predpokladom Tvrdenia 1.1 a nie je hamiltonovský.
2. Pokúste sa nájsť nájsť nekonečnú triedu nehamiltonovských grafov, ktoré splňujú nutnú podmienku z Tvrdenia 1.1.

1.2 Postačujúce podmienky

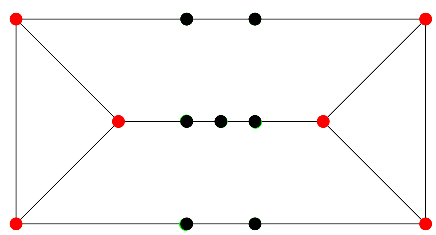
Tri základné typy podmienok:

1. Podmienky na stupne - patria ku najstarším. Vychádzajú z predpokladu, že čím viac hrán graf má, tým väčšia je šanca že obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Otázka je, *akým spôsobom* zabezpečiť "veľa" hrán. Prirodzená požiadavka - veľké stupne, nefunguje. Príkladom je kompletný graf K_{n-1} plus visiaca hrana. To znamená, že existujú grafy ktoré majú skoro všetky hrany a predsa nie sú hamiltonovské. Pomôže, ako uvidíme neskôr, "rovnomerné" rozdelenie hrán.



Obr. 4: nehamiltonovský graf, obsahuje skoro všetky hrany.

2. Podmienky na štruktúru. Napríklad podmienky, ktoré zakážu existenciu indukovaného podgrafu z danej množiny $\mathbb{F}$. Tu prominentnú úlohu zohráva hviezda $K_{1,3}$. Dobre zvolené zakázané podgrafy spolu s ďalšími podmienkami (napr. treba zabezpečiť 2-súvislosť, čo ale nemusí stačiť) potom garantujú existenciu hamiltonovskej kružnice. Otázka je, *ktoré* sú tie ďalšie podmienky, a ktoré grafy prehlásiť za zakázané. Ide o pomerne nový a aktuálny smer výskumu, začiatky siahajú do 70-tych rokov 20 stor.



Obr. 5: nehamiltonovský, 2-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$

3. Generovanie hamiltonovských grafov pomocou grafových operácií. Skúmajú sa rôzne typy súčinov, resp. modifikácie grafov ako napr. hranový graf a pod. Zaujíma nás, či výsledný graf je hamiltonovský. Pre ilustráciu, hranový graf eulerovského grafu je hamiltonovský. Podobne, hranový graf hamiltonovského grafu je hamiltonovský. Možný je aj obrátený postup. Predpíšme triedu $\mathcal{G}$ a operáciu. Potrebujeme rozpoznať, či graf v $\mathcal{G}$ je výsledkom tejto operácie, a tiež zrekonštruovať grafy z ktorých grafy v $\mathcal{G}$ danou operáciou vznikli. Potom vlastnosti týchto koreňových grafov môžu garantovať existenciu hamiltonovskej kružnice vo výslednom grafe z $\mathcal{G}$.

My sa budeme **zaoberať podmienkami** prvého a druhého typu.

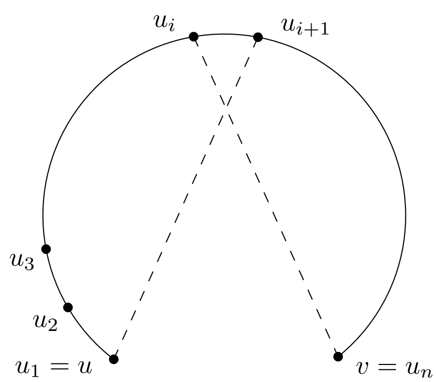
1.3 Postačujúce podmienky na stupne

Veta 1.1 (A. Dirac, 1952) *Graf na $n \geq 3$ vrcholoch a minimálnym stupňon $\delta \geq n/2$ je hamiltonovský.*

Dôkaz. Kompletný graf K_2 nie je hamiltonovský a každý vrchol má stupeň 1. Preto je podmienka $n \geq 3$ potrebná. Ďalej postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nie je hamiltonovský. Preto nie je kompletý a tak má aspoň dva nesusedné vrcholy.

G vnoríme do *maximálneho* nehamiltonovského grafu $G^\star$: zvolíme nehranu $e = uv \notin G$.
- Ak $G + e$ je hamiltonovský, hranu e vymažeme.
- Ak $G + e$ nie je hamiltonovský, hranu e ponecháme.
- Iterujeme.

Po konečnom počte krokov prídeme ku grafu, pomenujme ho $G^\star$ s $\delta \geq n/2$, ktorý nie je hamiltonovský a pridanie ľubovoľnej hrany uv, u a v nie sú susedné, spôsobí vznik hamiltonovskej kružnice. Preto $G^\star$ obsahuje hamiltonovskú cestu P z u do v.



Obr. 6: hamiltonovská cesta v $G^\star$ spolu s hranami vynútenými vzťahom (1)

Položme

$$S = \{i : uu_{i+1} \in EG^\star\}, \quad T = \{i : vu_i \in EG^\star\}$$

Platí

$$|S| \ = \deg_{G^\star} u \geq \deg_G u \geq \frac{n}{2}, \quad |T| \ = \deg_{G^\star} v \geq \deg_G v \geq \frac{n}{2}$$

Jednoduchá rovnosť

$$|S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| \tag{1}$$

spolu s faktom $v \notin S \cup T$ implikuje, že existuje $i \in S \cap T$.

Potom ale

$$u, u_2, \ldots, u_i, v, u_{n-1}, \ldots u_{i+1}, u$$

je hamiltonovská kružnica v $G^\star$ - spor s voľbou $G^\star$. Hotovo.

0re si všimol, že podmienka $\delta \geq n/2$ je len k tomu, aby súčet stupňov každej dvojice nesusených vrcholov bol aspoň n. Vtedy ani nepotrebujeme vnorenie do maximálneho nehamiltonovského grafu. Stačí uvážiť najdlhšiu cestu P medzi nesusednými vrcholmi u a v, a P modifikovať na kružnicu v G na tej istej množine vrcholov ako P (aplikujeme argument(1)). Z voľby P a súvislosti G vyplynie, že zkonštruovaná kružnica je hamiltonovská.

Veta 1.2 (Ore, 1960) *Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak* deg$u$ + deg$v$ $\geq n$ *pre každú dvojicu nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

Uvedené podmienky nie je možné zoslabiť:
- Podmienka $\delta \geq n/2$: uvážme graf G ktorý pozostáva z dvoch klík $K_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ a $K_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ so spoločným vrcholom. Graf G nie je hamiltonovský a má $\delta = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Pre n nepárne uvážme kliky $K_{\frac{n-1}{2}}$ a $K_{\frac{n+1}{2}}$, opäť so spoločným vrcholom. Iným príkladom je kompletný bipartitný graf, veľkosť partií sa líši presne o 1.
- Podmienku deg$u$+deg$v \geq n, \forall uv \notin G$: uvážme graf, ktorý pozostáva z dvoch klík K_n a K_3 so spoločným vrcholom.

1.4 Hamiltonovské postupnosti

Odvodíme teraz výsledok, ktorý je v istom zmysle spomedzi všetkých podmienok na stupne najlepší možný. Najskôr zavedieme potrebné pojmy:

- Postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \cdots \leq d_n$ celých čísel je *grafová*, ak existuje graf G na n vrcholoch, ktoré možno očíslovať $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, že $\deg u_i = d_i$ pre všetky i. Krátko hovoríme, že G *realizuje* postupnosť S.

Napríklad, postupnosť $4, 4, 4, 4, 4$ je realizovaná kompletným grafom K_5 a žiadnym iným, postupnosť $2, 2, 2, 2, 2, 2$ má dve realizácie: kružnicu C_6 a dve kópie kompletmého grafu K_3.

- Hovoríme, že grafová postupnosť je *hamiltonovská*, ak každý graf ktorý ju realizuje je hamiltonovský.

Napríklad, postupnosť ktorá vyhovuje Diracovej podmienke $\delta \geq n/2$, $n \geq 3$ je hamiltonovská, naproti tomu $2, 2, 2, 2, 2, 2$ nie je hamiltonovská.

- Postupnosť $S^\star = d_1^\star \leq d_2^\star \leq \cdots \leq d_n^\star$ *dominuje* postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, označujeme $S \leq S^\star$, ak $d_i \leq d_1^\star$, pre všetky i.

Teraz Diracovu vetu môžeme vysloviť aj takto: Postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, $d_i \geq n/2$ pre všetky i, $n \geq 3$, je hamiltonovská.

Ak $S^\star$ dominuje S, tak $S^\star$ splňuje *rovnakú* podmienku ako S, t.j. $d_i^\star \geq n/2$ pre všetky i, a teda $S^\star$ je hamiltonovská. V tomto zmysle je podmienka zformulovaná v nasledujúcej vete najlepšia možná.

Veta 1.3 (Chvátal, 1973) *Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch a nech postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ jeho stupňov vyhovuje podmienke: Pre každé $k < \frac{n}{2}$ platí*

$$d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k \qquad (\star)$$

Potom G má hamiltonovskú kružnicu. Ak S nesplňa podmienku $(\star)$, tak S je dominovaná grafovou postupnosťou, ktorá nemá hamiltonovskú realizáciu.

Dôkaz: Najskôr odvodíme platnosť prvej časti tvrdenia. Postupovať budeme nepriamo: Nech G nie je hamiltonovský, a nech jeho postupnosť stupňov S vyhovuje podmienke $(\star)$.

$$G \text{ vnoríme do maximálneho nehamiltonovského grafu } G^\star$$

Všimnime si, že

$$\text{postupnosť } S^\star \text{ stupňov grafu } G^\star \text{ vyhovuje podmienke } (\star)$$

Graf $G^\star$ nie je hamiltonovský, a preto nie je kompletný. Zo všetkých dvojíc vrcholov u, v takých, že $uv \notin G^\star$ zvolme maximálnu nehranu, t.j.

$$uv \notin G^\star \text{ a } d^\star u + d^\star v \geq d^\star x + d^\star y \text{ pre každú } xy \notin G^\star$$

Môžeme predpokladať, že

$$d^\star u \leq d^\star v$$

Z maximality $G^\star$ plynie, že $G^\star + uv$ má hamiltonovskú kružnicu a teda $G^\star$ má hamiltonovskú cestu z u do v. Teraz zopakujeme úvahu o (1) z vety 1.1. Tentoraz je $S \cap T = \emptyset$ (inak $G^\star$ má hamiltonovskú kružnicu - spor s voľbou $G^\star$), čo znamená že

$$d^\star u + d^\star v = |S| + |T| < n$$

To spolu s $d^\star u \leq d^\star v$ dáva

$$d^\star u < \frac{n}{2}$$

Pozrime sa na stupeň $d^\star u_i$, kde $i \in S : u_i v \notin G^\star$ a z maximality nehrany uv plynie

$$d^\star u_i + d^\star v \leq d^\star u + d^\star v$$

$$d^\star u_i \leq d^\star u$$

Preto $G^\star$ má aspoň $|S| = d^\star u$ vrcholov stupňa nanajvýš $d^\star u$. Položme $k = d^\star u$. Potom $d_k^\star \leq k < \frac{n}{2}$ a podľa $(\star)$ musí byť $d_{n-k}^\star \geq n - k$. Posledná nerovnosť nám hovorí, že máme $k + 1$ vrcholov stupňa aspoň $n - k$. Vrchol u nemôže byť spojený s každým z nich, lebo jeho stupeň je k. Preto

$$\text{existuje vrchol } w \text{ taký, že } uw \notin G^\star \text{ a } d^\star w \geq n - k$$

Odtiaľ

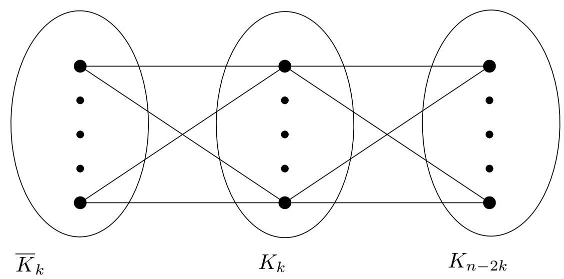
$$d^\star u + d^\star w \geq n > d^\star u + d^\star v$$

čo je spor s voľbou uv (maximálna nehrana v $G^\star$). Tým je platnost prvej časti tvrdenia dokázaná.

Dôkaz druhej časti tvrdenia: Predpokladajme, že postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, $n \geq 3$, je grafová a nevyhovuje podmienke ($\star$). Potom S je dominovaná postupnosťou

$$S^\star = k, k, \ldots, k, n-k-1, n-k-1, \ldots, n-k-1, n-1, n-1, \ldots, n-1$$

s k členmi rovnými k, s $n-2k$ členmi rovnými $n-k-1$, a k členmi rovnými $n-1$. Postupnosť $S^\star$ je postupnosťou stupňov *jediného* grafu, ozn. ho $G(k,k,n)$, s množinou vrcholov $X \cup Y \cup Z$, kde $|X| = k$, $|Y| = k$, $|Z| = n-2k$ a e je hrana v $G(k,k,n)$ práve vtedy keď aspoň jeden z jej koncov leží v Y, alebo obidva jej konce ležia v Z.

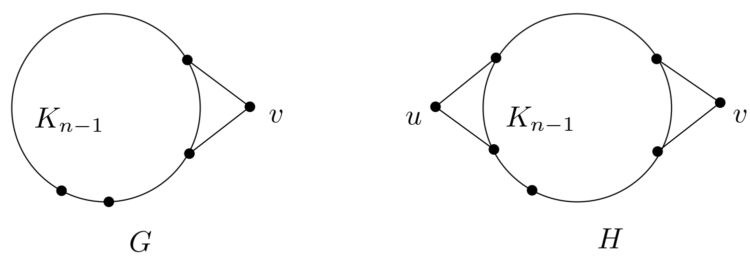


Obr. 7: graf $G(k,k,n)$

$G(k,k,n)$ nie je hamiltonovský - nevyhovuje nutnej podmienke z tvrdenia 1.1.

Úloha. Graf ktorý vyhovuje Oreho podmienke vyhovuje aj Chvátalovej podmienke. Dokážte.

Príklad. Graf G ukazuje, že Oreho podmienka je striktným rozšírením Diracovej podmienky a graf H ukazuje, že Chvátalova podmienka je striktným rozšírením Oreho podmienky.



Obr. 8: porovnanie postačujúcich podmienok na stupne

1.5 Uzáver grafu

Posledná z podmienok ktorú si predstavíme je inšpirovaná Oreho vetou 1.2: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre *každú* dvojicu u, v nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Pripomeňme si základnú myšlienku dôkazu, od tej sa budú odvíjať ďalšie úvahy:

- graf G je súvislý, to zaručuje podmienka na súčet stupňov nesusedných vrcholov.

- Nech P je najdlhšia cesta v G, P modifikujeme na kružnicu na tej istej množine vrcholov ako P:

$$P = u_1, \ldots, u_k, \text{ a môžeme predpokladať, že } u_1 u_k \notin G$$

Susedia vrcholov u_1, u_k ležia na P, preto

môžeme aplikovať argument (1) z dôkazu Diracovej vety.

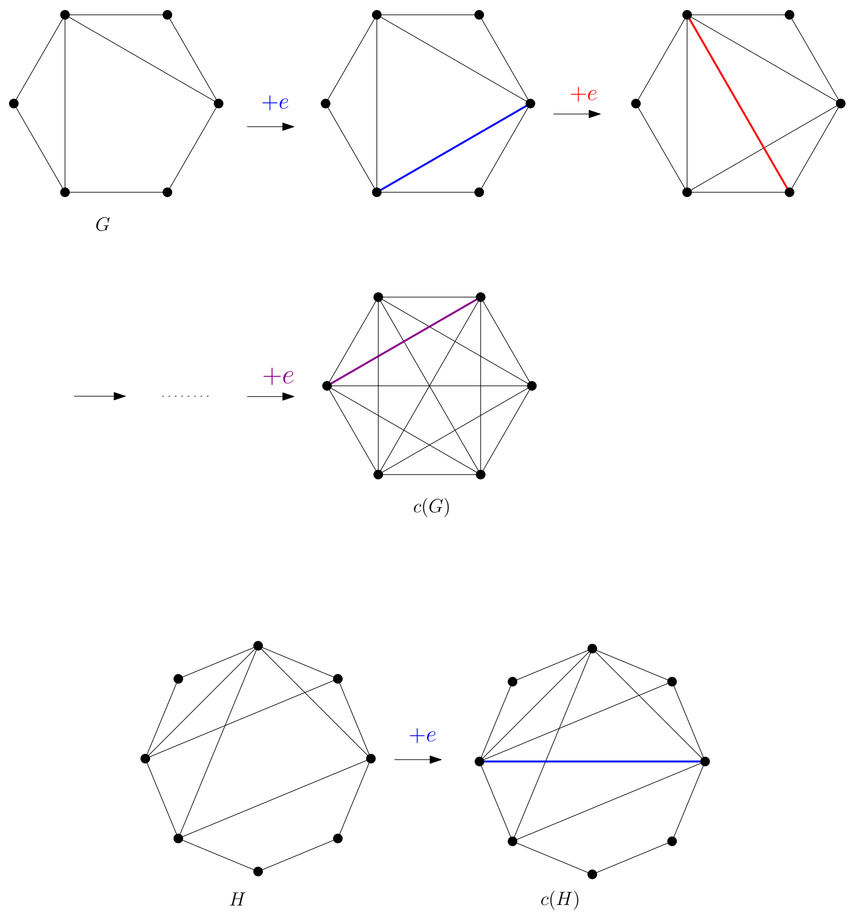
Sľúbená kružnica je zostrojená. Ak $k = n$, hotovo - zostrojená kružnica je hamiltonovská. Inak existuje vrchol mimo zostrojenej kružnice, z ktorého ide hrana do tejto kružnice - spor s voľbou P.

Predpoklad $\deg u + \deg v \geq n$ pre *každú* dvojicu nesusedných vrcholov zameňme s $\deg u + \deg v \geq n$ pre dvojicu nesusedných vrcholov u a v. Za P zvolme najdlšiu cestu z u do v. Ďalej postupujme ako pred chvíľou. Prídeme ku záveru: graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

Lema 1.1 (Ore) *Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch a nech u, v je dvojica nesusedných vrcholov so súčtom stupňov* $\deg u + \deg v \geq n$. *Potom graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.*

Zmysel lemmy spočíva v možnosti iterovať operáciu pridania hrany, až skončíme s grafom v ktorom je súčet stupňov ľubovolných dvoch nesusedných vrcholov menší ako n. Tento graf nazývame **uzáver** grafu G a označujeme $c(G)$.

Príklad. Uzáver grafu má aspoň toľko hrán ako graf z ktorého vyšiel a nanajvýš toľko ako kompletný graf, môže nastať aj prípad "medzi".



Obr. 9: uzáver $c(G) = K_6$, uzáver $c(H) = H + e$

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný. Priamo z konštrukcie uzáveru a lemy 1.1 plynie

Veta 1.4 (Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Dôsledok 1.2 *Ak uzáver grafu G je kompletný graf, tak G je hamiltonovský.*

Je zrejmé, že uzáver grafu ktorý vyhovuje Oreho podmienke je kompletný graf. Nie je ťažké ukázať, napr. imitovaním dôkazu Chvátalovej vety 1.3, že aj uzáver grafu ktorý vyhovuje Chvátalovej podmienke je kompletný. Súčasne graf G na obrázku 9 ukazuje, že dôsledok 1.2 je striktným rozšírením vety 1.4 .

Doterajšie výsledky shematicky popisuje reťazec

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{CH} \subset \{c(G) = K_n\} \subset ? \subset \mathcal{H}$$

$\mathcal{D}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Diracovej podmienke z vety 1.1, $\mathcal{O}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Oreho podmienke z vety 1.2, $\mathcal{CH}$ obsahuje grafy ktoré spĺňajú Chvátalovu podmienku z vety 1.3 a $\mathcal{H}$ označuje grafy s hamiltonovskou kružnicou (v každej triede len grafy na $n \geq 3$ vrcholoch).

Zostáva, ak pokračujeme v tejto línii, • popísať grafy ktorých uzáver je kompletný graf a nevyhovujú Chvátalovej podmienke, • popísať grafy ktoré sú hamiltonovské a ich uzáver nie je nutne kompletný graf.

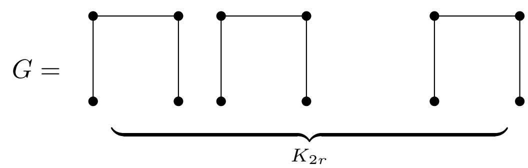
Na záver uvedieme striktné rozšírenie Oreho podmienky, ktoré pripúšťa aby uzáver nebol kompletný graf.

Veta 1.5 (Geng-Hua-Fan, 1984) *Nech G je 2-súvislý graf na $n \geq 3$ vrcholoch, a nech u, v sú dva vrcholy v G. Ak platí*

$$\mathrm{d}(u,v) = 2 \Longrightarrow \max\{\deg(u), \deg(v) \geq \frac{n}{2}\}$$

tak G má hamiltovskú kružnicu.

Veta 1.5 je podstatným zovšeobecnením Oreho vety 1.2. Graf na obrázku nižšie ukazuje, že uzáverom grafu ktorý vyhovuje predpokladom môže byť samotný graf.



Obr. 10: G vyhovuje predpokladom vety 1.5

Tým prechádzku postačujúcimi podmienkami na stupne vrcholov končíme.

1.6 Postačujúce podmienky na štruktúru

Koncom 70-tych rokov 20. storočia **Oberly a Sumner** publikovali článok

Every connected, locally connected graph with no induced claw is hamiltonian

[Journal of Graph Theory, Vol.3, 1979,351-356], ktorým otvorili nový smer výskumu hamiltonovských grafov. Zavedieme potrebné pojmy a potom sa prejdeme dôkazom ich výsledku.

- lokálne súvislý graf G: podgraf indukovaný na vrcholoch susedných s vrcholom u je súvislý, pre každý u,

- claw = hviezda $K_{1,3}$

Veta 1.6 *Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrcholoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.*

Dôkaz: postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G:

- $n \geq 3$ a lokálna súvislosť implikujú, že G obsahuje kružnicu. Nech C je *najdlhšia kružnica* v G.

- G nie je hamiltonovský, preto existuje vrchol $v \notin C$

- G je súvislý, preto v je koncom hrany $e = uv$, pričom u leží na C

Nech u_1, u_2 sú vrcholy *konzekutívne* s u na C. Potom

- hrany vu_1 a vu_2 nepatria G, v opačnom prípade máme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C

- u_1u_2 je hrana v G, inak vu, vu_1vu_2 indukuje hviezdu $K_{1,3}$ v G - spor s predpokladom vety.

- v, u_1, u_2 sú susedné s u a v nie je sused ani jedného z nich.

Z lokálnej súvislosti grafu G plynie:

- v okolí vrchola u *existuje cesta* z v do jedného z vrcholov u_1, u_2 ktorá neobsahuje ten druhý vrchol. (Ak by napríklad cesta z v do u_1 obsahovala u_2 tak by jej časť ktorá vedie z v do u_2 bola cestou z v do u_2, ktorá neobsahuje u_1.)

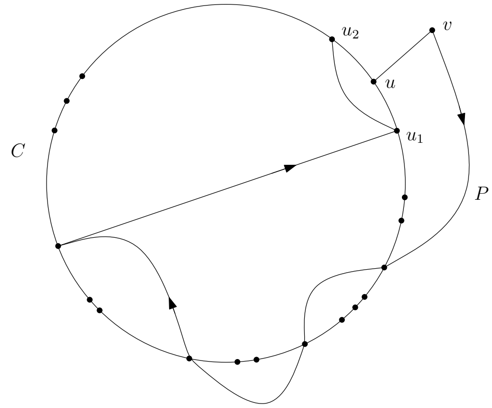
Nech teda P je cesta z v do u_1, v okolí u, ktorá neobsahuje u_2. Ak by $P \cap C = \{u_1\}$, tak by sme dostali dlhšiu kružnicu než je C. Preto $(P \cap C) \setminus \{u_1\} \neq \emptyset$

Pre vrchol vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ nastane jedna z možností:

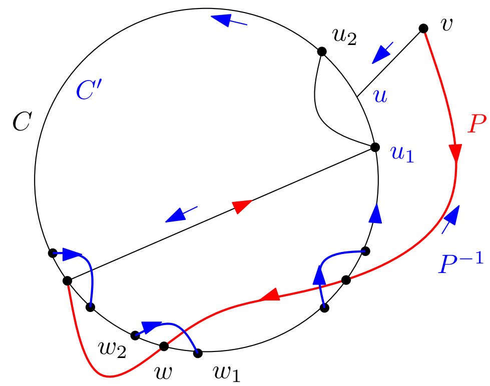
1. w je *singulárny* : žiadny z vrcholov konzekutívnych s w na C nie je susedný s u, a teda neleží na P

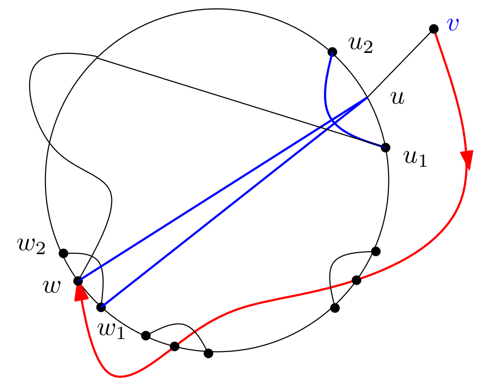
2. w nie je singulárny.

Na grafe vľavo budeme ilustrovať situáciu keď každý vrchol je singulárny, grafom vpravo situáciu, keď w je prvý nesingulárny vrchol na ktorý natrafíme keď vyjdeme z v po ceste P.



Obr. 11: štruktúra v G indukovaná predpokladom neexistencie hamiltonovskej kružnice





• Predpokladajme, že každý vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ je singulárny. Potom

$$w \text{ je susedný s } u \text{ a } w_1, w_2 \text{ konzekutívne s } w \text{ na } C \text{ nie sú susedné s } u$$

$$\text{indukovaný podgraf } \langle w_1, w, w_2 \rangle \neq K_{1,3} \text{ a tak } w_1 w_2 \text{ je hrana v } G$$

Prejdime sa po $C \cup \{v\}$: začnime vo vrchole u_2, pokračujme proti smeru hodinových ručičiek do u tak, že každý $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obídeme cez hranu w_1w_2, až prídeme do u_1. Potom pokračujeme po ceste P v *opačnom* smere až prídeme do v, ďalej hranou vu a prechádzku uzavrieme hranou uu_2.
Získali sme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C. Hotovo

• Predpokladajme teraz, že $(P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obsahuje nesingulárny vrchol. Tento prípad prevedieme na predošlý nasledovným spôsobom:

Nech w je *prvý* nesingulárny vrchol na ktorý natrafíme na ceste P z vrchola v do vrchola u, a nech w_1, w_2 sú *konzekutívne* s w na P. Vrchol w je nesingulárny, preto aspoň jeden z vrcholov w_1, w_2 leží v okolí u. Môžeme predpokladať, že je to vrchol w_1.

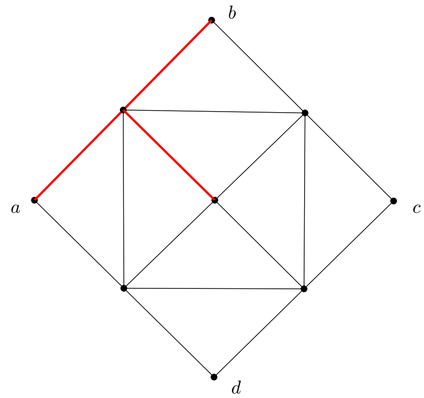
Prevedieme kružnicu C na novú kružnicu C', ktorá obsahuje presne tie isté vrcholy ako C:

$$\text{vymažeme hrany } ww_1, uu_1, uu_2 \text{ a pridáme hrany } wu, w_1u, u_1u_2$$

- vrcholy w a w_1 sú konzekutívne s u na C'
- cesta $P' \subseteq P$ z v do w neobsahuje w_1 (inak mal byť vybraný namiesto w, lebo je tiež nesingulárny)
- podľa voľby w, cesta P' neobsahuje žiadny nesingulárny vrchol.

Súhrnom, vzhľadom na P' a C' sme sa ocitli v předošlom prípade. Dôkaz je ukončený.

Pre úplnosť uvedieme príklad, ktorý spolu s grafom na obrázku 5. ukazujú, že žiadnu z podmienok vo vete 1.6 nie je možné vynechať.



Obr. 12: lokálne súvislý, nehamiltonovský graf s indukovaným $K_{1,3}$

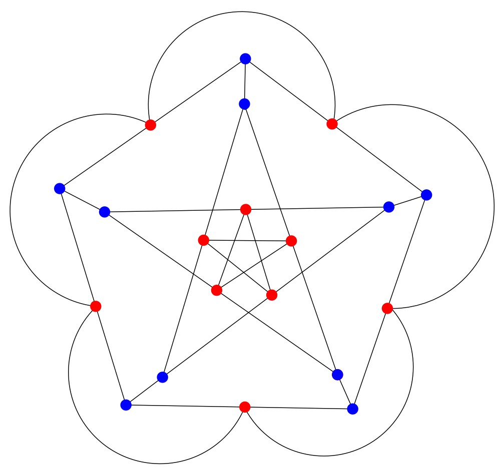
Na záver našich úvah vyslovíme dve hyporézy, ktoré sa týkajú grafov bez indukovanej hviezdy $K_{1,3}$.

Hypotéza 1.1 (Matthews, Sumner, 1984) *Každý 4-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.*

Hypotéza 1.2 (Thomassen, 1985) *Každý 4-súvislý hranový graf je hamiltonovský.*

Komentár:

Oberly-Sumner graf na obrázku ninižšie ukazuje, že podmienku 4-súvislosti nie je možné zoslabiť.



Obr. 13: Oberly-Sumner graf je 3-súvislý nehamiltonovský, bez indukovaného $K_{1,3}$

Niektoré novšie výsledky:

Ryjáček, 1977: Hypotéza 1.1 a hypotéza 1.2 sú ekvivalentné. Každý 7-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Kaiser, Vrána, 2012: 5-súvislý graf s minimálnym stupňom $\delta \geq 6$ bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.